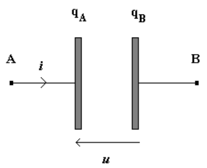
Thème : Dynamique d'un système électrique
Cours 24 : Intensité électrique – Etude d'un condensateur
(version élèves)

B.O. Étudier la dynamique d'un système électrique. Intensité d'un courant électrique en régime variable.
Comportement capacitif. Modèle du condensateur. Relation entre charge et tension ; capacité d'un condensateur.
Modèle du circuit RC série : charge d'un condensateur par une source idéale de tension, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.
Capteurs capacitifs.

I. Les condensateurs.

1. Définition.

Un condensateur plan est constitué de deux armatures dont les surfaces en regard sont séparées par un isolant électrique.
Représentation symbolique :



2. Orientation d'un circuit en utilisant la convention récepteur.

Si q_A est la charge de l'armature A et q_B celle de l'armature B, on a : $q_A = -q_B$ $q_A > 0$
En convention récepteur, la flèche tension est orientée vers l'armature où arrive le courant.

3. Capacité d'un condensateur C .

La capacité d'un condensateur est définie par la relation entre la tension u aux bornes du condensateur et la charge Q que porte d'une de ses armatures : $Q = C.u$ Soit $C = \frac{Q}{u}$ Elle s'exprime en Farad (F).
Pratiquement, la capacité informe sur l'aptitude du condensateur à accumuler de l'énergie lorsqu'il est soumis à une tension continue.

La capacité d'un condensateur dépend de sa géométrie, c'est-à-dire de ses dimensions.
La capacité d'un condensateur dépend de la surface S (m^2) des armatures, de la distance d (m) entre ces armatures et enfin d'une grandeur qui caractérise le comportement d'un milieu donné à un champ électrique, qui s'appelle la permittivité et est notée ε (F.m^{-1})
La relation est $C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}$

4. Relation charge q-intensité i.

La charge q du condensateur évolue au cours du temps. Lors de la charge du condensateur, q augmente.
Ce débit de charge correspond à l'intensité i.
Charge du condensateur : $i = \frac{dq}{dt}$ $i > 0$ En convention récepteur
Décharge du condensateur : $i = \frac{dq}{dt}$ $i < 0$ i est une grandeur algébrique.

Quand q ne varie pas, l'intensité est nulle. Le condensateur se comporte comme un isolant.
q : charge de l'armature Coulomb (C) i : intensité Ampère (A) t : temps seconde (s)

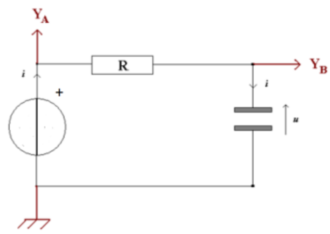
III. Dipôle RC.

1. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension.

Un échelon de tension correspond au passage rapide d'une valeur de tension $u = 0$ à une valeur $u = E$.

1.1. Montage d'un dipôle RC alimenté par un générateur de tension continue idéal

Idéal : le générateur délivre une tension constante quel que soit la valeur de l'intensité dans le circuit – il n'a pas de résistance interne. On réalise le montage suivant :



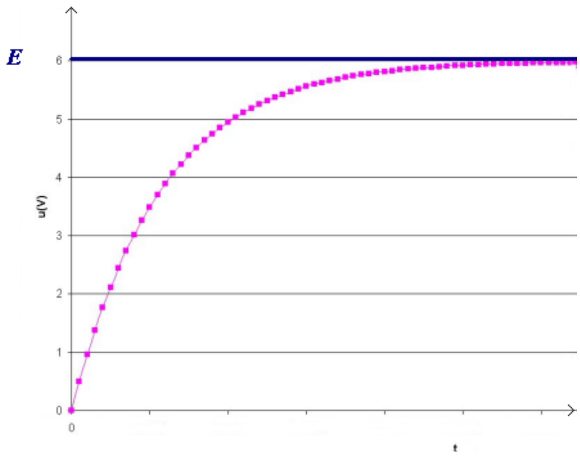
$R = 100\ \Omega$
$C = 0{,}12\ \mu$F

Astuce : pour **mesurer à la fois** la tension E aux bornes du GBF et du condensateur u pour placer correctement les bornes de l'oscilloscope.

- Placer dans un premier temps la masse entre ces deux composants.
- Placer ensuite les deux bornes de mesures Y_A et Y_B de l'autre côté des composants.

Ainsi orienté, la tension u est positive.

1.2. Oscillogramme obtenu.



E : la tension continue aux bornes du générateur.
u : la tension aux bornes du condensateur

Question :

La tension aux bornes du condensateur est-elle constante ou **variable** / **continue** ou discontinue ?
La tension varie de 0 à E lors de la charge du condensateur
L'évolue de la variation est continue selon une loi exponentielle.

1.3. Comment procéder pour visualiser l'intensité circulant dans le circuit à l'aide de l'oscilloscope ?

Aux bornes de la résistance, la loi d'ohm s'énonce ainsi $u_R = Ri$. Il suffit de mesurer la tension u_R afin de visualiser l'intensité i.

La valeur de i est $i = \dfrac{u_R}{R}$

1.4. Le temps caractéristique ou constante de temps τ d'un dipôle RC.

Définition.

Le temps caractéristique est la durée nécessaire pour atteindre 63% de la tension maximale lors de la charge et 37% de la tension maximale lors de la décharge.
La constante de temps a pour expression $\tau = R.C$ pour un circuit RC. Elle s'exprime en seconde.

Vérification de l'unité du temps caractéristique par analyse dimensionnelle.

L'analyse dimensionnelle consiste à écrire une équation aux dimensions.
On cherche à exprimer la dimension de R et de C en fonction des dimensions de l'intensité, de la tension et du temps.

- D'après la loi d'Ohm on a $u = Ri$ soit $R = \dfrac{u}{i}$

La dimension de R s'écrit $[R]=\left[\frac{U}{I}\right]=\frac{[U]}{[I]}$ (1)

- A partir de la définition de l'intensité du courant électrique, on a $i = \frac{dq}{dt}$

La dimension de la charge s'écrit $[Q] = [I] \times [T]$ (2)

- A partir de la relation $q = C.u$

La dimension de la capacité s'écrit $[C]=\frac{[Q]}{[U]}$, En utilisant la relation (2) on a $[C] = \frac{[I]\cdot[T]}{[U]}$

La dimension $[RC] = [R] \times [C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]}{[U]} \times [T]$ Soit après simplification $[RC] = [T]$

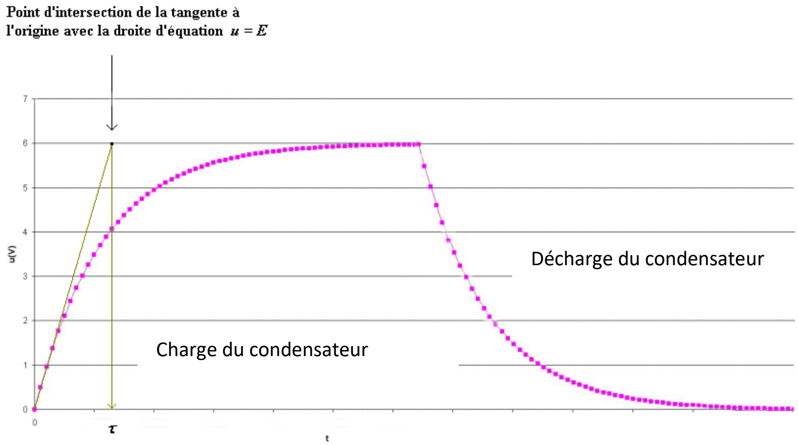
Le temps caractéristique a la dimension d'un temps. Son unité est la seconde (s).

Détermination graphique du temps caractéristique

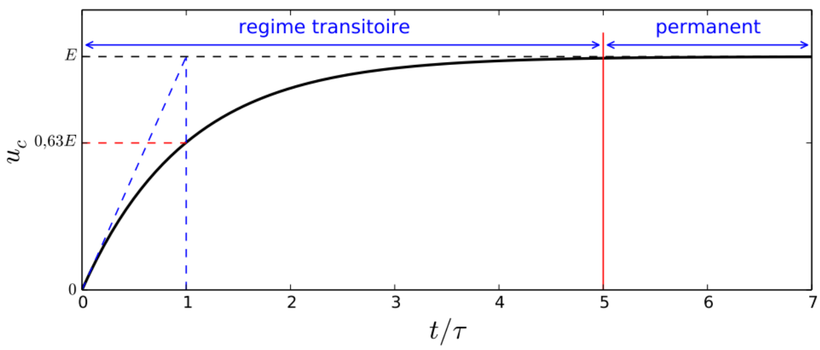
Détermination graphique de τ dans le cas de la charge du condensateur

Méthode :

- On trace la tangente à l'origine 0
- On détermine le point d'intersection de cette tangente avec la droite d'équation $u = E$
- On projette orthogonalement ce point sur l'axe des abscisses.



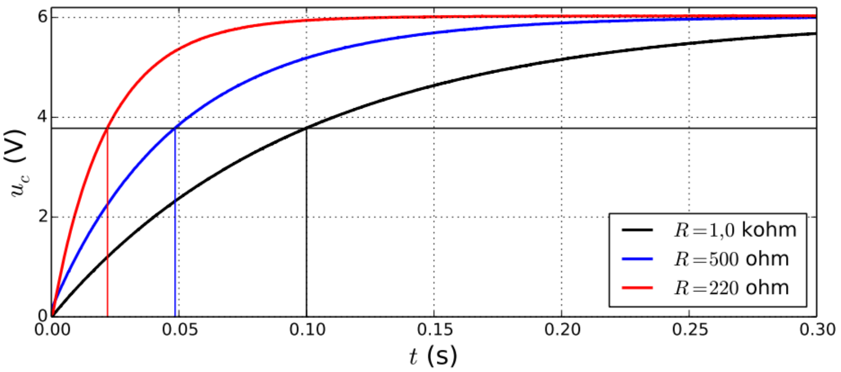
Régime transitoire et régime permanent :



Au bout d'une durée de **5**τ, on considère que la charge est complète (99%).
Le régime est dit permanent, c'est-à-dire que la tension est constante et que l'intensité circulant dans le circuit est nulle.

Temps (s)	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
u_C (t)	63% de E	86% de E	95% de E	98% de E	99% de E

Influence de la valeur de la résistance R sur la charge d'un condensateur :

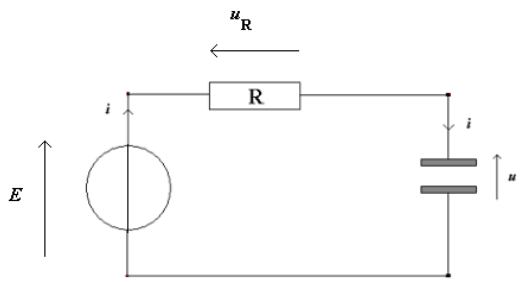


Question : Interpréter les graphiques ci-contre et conclure quant à l'influence de la valeur de la résistance sur la durée de charge du condensateur.

On constate que plus la valeur de la résistance est élevée plus le temps caractéristique est élevé, donc que la charge est plus lente.

1.5. Résolution analytique de la charge du condensateur.

1.5.1. Etablissement de l'équation différentielle de charge du condensateur.



La méthode d'établissement de l'équation différentielle est la suivante :

- Ecrire la loi d'additivité des tensions.
- Exprimer *i* en fonction de *u* afin d'obtenir une équation ne comportant que des expressions de tensions.

On applique la loi d'additivité des tensions : $E = u_R + u(t)$

$\Leftrightarrow E = R.i(t) + u(t)$ avec la loi d'Ohm : $u_R = Ri$

$\Leftrightarrow R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + u(t) = E$ avec $i = \frac{dq}{dt}$

$\Leftrightarrow R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u(t) = E$ avec $q = C.u_c(t)$

L'équation différentielle peut donc s'écrire : $R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u(t) = E$

1.5.2. Résolution de l'équation différentielle d'ordre 1 avec second membre

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche à déterminer l'expression de la tension *u*(*t*) qui vérifie l'équation :
$R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E$

La solution de cette équation homogène associé à $u_c(t)$ correspond à la somme d'une solution générale et d'une solution particulière.

La résolution s'effectue donc en deux étapes :

Etape n° 1 : Résolution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire $R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$ pour trouver la solution générale qui correspond au régime transitoire, c'est-à-dire quand le condensateur se charge.

La solution de l'équation différentielle est la somme de la solution générale et de la solution particulière.

La solution générale en régime transitoire s'écrit : $u(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ ou encore $u(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = RC$

K est une constante à déterminer.

Etape n°2 : Détermination de la solution particulière de l'équation complète $R \cdot C \cdot \frac{d(u_c(t))}{dt} + u_c(t) = E$

La solution particulière de l'équation : $R \cdot C \cdot \frac{d(u_c(t))}{dt} + u_c(t) = E$ correspond au moment où la tension est constante

C'est-à-dire que $\frac{d(u_c(t))}{dt} = 0$ (régime permanent)

La tension a atteint alors sa valeur maximale quand $t \rightarrow \infty$.

$u_c(t) = constante$ alors $le\ terme$ $\frac{d(u_c(t))}{dt} = 0$

$R \cdot C \times 0 + u_c(t) = E$ soit $u_c(t) = E$

La **solution particulière** de l'équation différentielle est donc égale à ***E***

La solution de l'équation différentielle correspondant à la somme de la solution générale et de la solution particulière est :

$u_c(t) = E + K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Il reste à déterminer la constante *K*.

Détermination de la constante *K* par les conditions initiales

On se place dans les <u>conditions initiales</u> : à $t = 0$ on a $u(0) = 0$

$\Leftrightarrow E + K \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = 0$

$\Leftrightarrow E + K = 0$ avec $e^{-\frac{0}{\tau}} = 1$

$\Leftrightarrow K = -E$

La solution complète de l'équation différentielle est donc : $u_c(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\Leftrightarrow u_c(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

<u>Question</u> : Déterminer la valeur de la tension $u(t)$ quand $t = \tau$ sachant que $E = 1{,}0$ V

quand $t = \tau$, on a $u_c(\tau) = E - E \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau}}$

$\Leftrightarrow u_c(\tau) = E - E \cdot e^{-1}$

$\Leftrightarrow u_c(\tau) = 1{,}0 - 1{,}0 \cdot e^{-1}$

$\Leftrightarrow u_c(\tau) = 0{,}63$ V

<u>Question</u> : Justifier le fait que l'on peut considérer que le condensateur est complètement chargé (supérieur à 99%) quand $t = 5\tau$

quand $t = 5\tau$, on a $u_c(\tau) = E - E \cdot e^{-\frac{5\tau}{\tau}}$

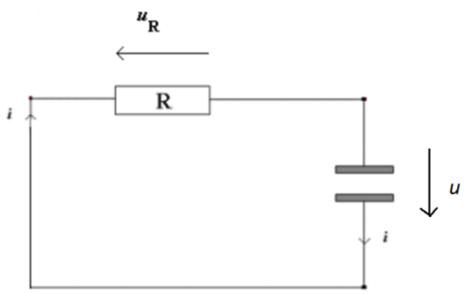
$\Leftrightarrow u_c(\tau) = E - E \cdot e^{-5}$

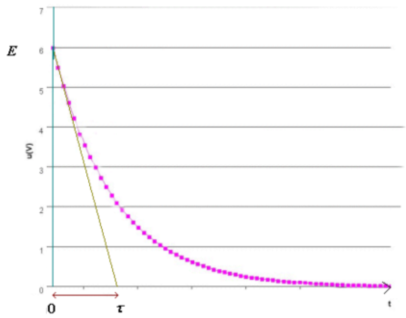
$\Leftrightarrow u_c(\tau) = 1{,}0 - 1{,}0 \cdot e^{-5}$

$\Leftrightarrow u_c(\tau) = 0{,}99$ V

1.6. Résolution analytique de la décharge d'un condensateur.

Pour décharger le condensateur, on fait basculer l'interrupteur de telle manière à ce que le circuit se réduise au circuit suivant :





Point d'intersection de la tangente à l'origine E avec la droite d'équation $u = 0$

Temps (s)	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
u_C (t)	37% de E	14% de E	5% de E	2% de E	1% de E

<u>Questions</u> :

- Montrer que l'équation différentielle de la décharge d'un condensateur est $\boldsymbol{R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0}$
- Montrer que la solution de cette équation différentielle est : $\boldsymbol{u_c(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$

La méthode d'établissement de l'équation différentielle est la suivante :

- Ecrire la loi d'additivité des tensions.
- Exprimer *i* en fonction de *u* afin d'obtenir une équation ne comportant que des expressions de tensions.

On applique la loi d'additivité des tensions :

$0 = u_R + u_c(t)$

$\Leftrightarrow 0 = R.i(t) + u_c(t)$ avec la loi d'Ohm : $u_R = Ri$

$\Leftrightarrow R \cdot \frac{dq_{(t)}}{dt} + u_c(t) = 0$ avec $i = \frac{dq}{dt}$

$\Leftrightarrow R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u(t) = 0$ avec $q = C.u_c(t)$

L'équation différentielle peut donc s'écrire : $R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u(t) = 0$

1.5.2. Résolution de l'équation différentielle.

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche à déterminer l'expression de la tension *u*(*t*) qui vérifie l'équation :
$R \cdot C \cdot \frac{du_{c(t)}}{dt} + u_{c(t)} = 0$

La résolution s'effectue en **une** étape (car il n'y a pas de solution particulière dans ce cas).

Résolution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire $R \cdot C \cdot \frac{du_{c(t)}}{dt} + u(t) = 0$

La solution de l'équation différentielle est la solution générale dont l'expression est : $u_c(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Il reste à déterminer la constante *K*.

Détermination de la constante *K* par les conditions initiales

On se place dans les <u>conditions initiales</u> : à *t* = 0 on a $u_c(0) = \boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow K \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = E$

$\Leftrightarrow K = E$ avec $e^{-\frac{0}{\tau}} = 1$

La solution complète de l'équation différentielle est donc : $\boldsymbol{u(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$

1.6. Vérification que $u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = RC$ est solution de l'équation différentielle $R \cdot C \cdot \frac{d(u_c(t))}{dt} + u_c(t) = E$ dans le cas de la charge du condensateur.

On remplace l'expression de $u_c(t)$ dans l'équation différentielle :

Rappel : la dérivée de A.e$^{\mathbf{B}.x}$ est A.**B**. e$^{B.x}$

$$R \cdot C \cdot \frac{d\left(\boldsymbol{E}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)}{dt} + \boldsymbol{E}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E$$

$$\Leftrightarrow\ R \cdot C \cdot \frac{d\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} + \boldsymbol{E}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \left(-\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot R \cdot C \cdot + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}} = E$$

E étant une constante $\frac{dE}{dt} = 0$

Avec $\tau = RC$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{RC}} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{RC}} \cdot R \cdot C \cdot + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{RC}} = E$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}} = E$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}$$

Il s'agit donc bien de la solution de l'équation différentielle.

1.7. Même exercice dans le cas de la décharge : Vérification que $u_c(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = RC$ est solution de l'équation différentielle $R \cdot C \cdot \frac{d(u_c(t))}{dt} + u_c(t) = 0$

Montrer que $u_c(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ est bien solution de l'équation différentielle $R \cdot C \cdot \frac{d(u_c(t))}{dt} + u_c(t) = 0$

$$R \cdot C \cdot \frac{d\left(E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} + E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \left(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot R \cdot C \cdot + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

Avec $\tau = RC$

$$\Leftrightarrow -\frac{\mathbf{1}}{\cancel{\boldsymbol{RC}}} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{RC}} \cdot \cancel{R \cdot C} \cdot + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

$$\textbf{-}\boldsymbol{E} \cdot \cancel{\boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}} + \boldsymbol{E} \cdot \cancel{\boldsymbol{e}^{-\frac{t}{\tau}}} = 0$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Il s'agit donc bien de la solution de l'équation différentielle.